

Zusammenfassung: Mathe 2

Formeln zu komplexen Zahlen

Schreibweisen:

$$z = x + yi = \underbrace{r \cdot e^{i \cdot \varphi}}_{\text{Polarform}} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y \geq 0; \quad \varphi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y < 0$$

Konjugation: $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$

Ist z die komplexe Lösung einer Gleichung, ist auch $\bar{z}$ eine Lösung.

Addition: Die Vektoren addieren sich.

Multiplikation: Die Winkel addieren sich; die Beträge multiplizieren sich.

Multiplikation mit i : Linksrotation des Vektors um 90° ;

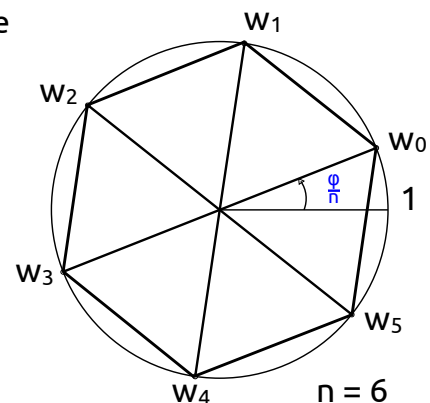
$$i^2 = -1 : 180^\circ; \quad \sqrt{i} = i^{0.5} : 45^\circ$$

Potenzen: $i^n = i^{(n \bmod 4)}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$

Division: Bruch mit konjugiert Komplexem des Nenners erweitern.

Quadrat: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot \varphi \cdot n}$

n -te Wurzeln w_k für $k = 0, 1, \dots, n-1$: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}$



Lösen von Gleichungen

p - q -Formel zur Lösung von Gleichungen: $z^2 + pz + q = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel zur quadratischen Ergänzung: $x^2 - 8x + 3$
 $(x - 4)^2 - 16 + 3$
 $(x - 4)^2 - 13$

Matrizen

Rechenregeln: $(A^T)^T = A$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,
 $A^0 = E$, $A^{-p} = (A^{-1})^p$, $A^{p+q} = A^p \cdot A^q$

Rechenregeln (Determinanten): $|A^T| = |A|$, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, $|A^{-1} \cdot A| = |E| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Multiplikation: „Zeile mal Spalte“ (nicht kommutativ)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 & dx_1 + ey_1 + fz_1 & gx_1 + hy_1 + iz_1 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 & dx_2 + ey_2 + fz_2 & gx_2 + hy_2 + iz_2 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 & dx_3 + ey_3 + fz_3 & gx_3 + hy_3 + iz_3 \end{pmatrix}$$

Anzahl der Spalten von A muss gleich der Anzahl der Zeilen von B sein: $A: m \times n$, $B: n \times r$, $C: m \times r$

Rang: $\text{Rg } M$ = Anzahl der Linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Matrix
Entspricht Rg einer quadratischen Matrix ihrer Zeilen- bzw. Spaltenzahl, wird sie **reguläre** Matrix genannt, ansonsten **singuläre** Matrix. Nur für reguläre Matrizen

existiert eine inverse Matrix. Bei singulären Matrizen ist die Determinante 0.

Einheitsmatrix E: Hauptdiagonalelemente 1, Außerdiagonalelemente 0, quadratisch

Transponierte Matrix A^T : Zeilen und Spalten vertauscht

Inverse Matrix A^{-1} : ergibt mit ursprünglichen Matrix multipliziert die Einheitsmatrix

Determinante: für Beispiel siehe „Eigenwerte und Eigenvektoren“

Lineare Abbildungen

Bsp. Abbildungsmatrix für Achsenspiegelung an x_1 -Achse: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Abbildungsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

Bsp. Abbildungsmatrix für Normalprojektion ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$): $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren

$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ λ : Eigenwert von A, $\vec{x}$: Eigenvektor von A ($\vec{x} \neq 0$)

Beispiel: Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ (zeigt auch das Berechnen von Determinanten)

Eigenwerte: Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ berechnen

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{Nach 1. Spalte aufgelöst}} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-2\lambda & \frac{\lambda}{4}(5-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{(I')} \\ \text{(II')} \\ \text{(III')} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{(I')} = \text{(I)} + \frac{\lambda}{4} \text{(III)} \\ \text{(II')} \\ \text{(III')} \end{matrix}$$

$$= -\lambda \cdot 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1-2\lambda & \frac{\lambda}{4}(5-\lambda) \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Nach 3. Zeile aufgelöst}} = -\lambda \cdot 4 \left((1-2\lambda) - (-\lambda) \left(\frac{\lambda}{4}(5-\lambda) \right) \right) = \lambda (\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) = 0$$

→ Eigenwerte durch Raten, Polynomdivision, p-q-Formel: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_{3/4} = 2$

Eigenvektoren: für jeden Eigenwert homogenes LGS $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$ lösen

z. B. für $\lambda = 2$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 5-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow x_4 = 2x_3 = 4x_2 = 8x_1 \rightarrow x_1 = \alpha \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, (\alpha \neq 0)$$

Folgen und Reihen

Folge: Liste von Zahlen (Glieder der Folge)

Reihe: Aufsummierung von Werten

Fixpunkt rekursiver Folgen: Wert, der beim Einsetzen in die Rekursion sich selbst zurück liefert; jeder Grenzwert ist Fixpunkt, aber nicht umgekehrt. Wenn Grenzwert existiert, kann dieser berechnet werden, indem man in der Formel a_n und a_{n+1} durch a

ersetzt und dann nach a auflöst: $a_0 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{10} \rightarrow a = \frac{a + 1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$

Grenzwert von Folge: Wert, gegen den Folge konvergiert

Beispiele:

$$a-b = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$
$$a_n = \sqrt{n^2+3n} - n = \frac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$$
$$b_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad c_n = \frac{n-1}{n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

Wert von konvergenter Reihe: Grenzwert der Folge der Teilsummen

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k - 1 \right) = 3 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = 3$$

geom. Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$A \cdot (k+1) + B \cdot k \Leftrightarrow A=1, B=-1$ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots = 1$

Vergleichskriterium

Für Folgen: a_n, b_n sind konvergent mit Grenzwert g
→ Grenzwert von c_n mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ ist ebenfalls g

$$\text{Bsp.: } \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\rightarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{6+\sin(n^2)}}_{\rightarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{7}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6+\sin(n^2)} = 1$$

Für Reihen:

$$\left. \begin{array}{l} \sum b_k \text{ konvergiert} \\ |a_k| \leq b_k \\ (\sum b_k \text{ ist konvergente Majorante}) \end{array} \right\} \rightarrow \sum a_k \text{ auch konvergent (sogar absolut konvergent)}$$
$$\left. \begin{array}{l} \sum b_k \text{ divergiert} \\ 0 \leq b_k \leq |a_k| \\ (\sum b_k \text{ ist divergente Minorante}) \end{array} \right\} \rightarrow \sum a_k \text{ auch divergent}$$

Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| := q$$

$q < 1$: Konvergenz
 $q > 1$: Divergenz
 $q = 1$: keine allg. Aussage (Randpunkte)

Beispiel: Quotientenkriterium

Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} := q$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \rightarrow \text{Konvergenz}$$

Leibnizkriterium (nur für alternierende Reihen!)

Wenn $a_0, a_1, a_2, \dots$ monoton fallend gegen 0 geht, dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \text{ für } a_k > 0.$$

$$\text{Bsp.: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0 \rightarrow \text{Konvergenz nach Leibniz}$$

$$\text{Potenzreihen } P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

x_0 : Entwicklungspunkt, a_k : Koeffizienten, r : Konvergenzradius

$|x - x_0| < r$: Konvergenz

$|x - x_0| > r$: Divergenz

$x = x_0 \pm r$: keine allg. Aussage (Randpunkte)

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(2x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2x-2}{3} \right| \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\rightarrow 1} = \underbrace{\left| \frac{2x-2}{3} \right|}_{\text{Bed. für Konvergenz}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$

→ Konvergenz: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$, Divergenz: $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{5}{2}$

$x = \frac{5}{2}$: $a_n = \frac{3^n}{3^n \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow$ Divergenz, da $\sum \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ für $\alpha \leq 1$

Randpunkte:

$x = -\frac{1}{2}$: $a_n = \frac{3^n}{(-3)^n \cdot \sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow$ Konvergenz nach Leibniz

Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots)$$

$$= 1 + (x+x) + (x^2+xx \cdot x^2) + \dots = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ableitungsregeln und Ableitungen wichtiger Funktionen

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{(n-1)}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$(\cos(x)^3)' = 3 \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x)) \quad \text{da} \quad (Z^3)' = 3 \cdot Z^2 \cdot Z'$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(x - \arctan x)' = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$(x^x)' = x^x \cdot (1 + \ln(x))$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

siehe auch FS Kapitel 6.3 (S.134)

Integrieren

Rechenregeln, siehe auch FS Kapitel 7 (S. 137)

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Stammfunktionen, siehe auch FS Kapitel 7.4 (S.149)

$$k^x = (k \cdot x)' \quad x^n = \begin{cases} \left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right)' & \text{wenn } n \neq -1 \\ (\ln|x|)' & \text{wenn } n = -1 \end{cases}$$

$$e^x = (e^x)' \quad e^{k \cdot x} = \left(\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x} \right)'$$

$$a^x \cdot \ln(a) \text{ für } a > 0 = (a^x)' \quad a^x = \left(\frac{a^x}{\ln(a)} \right)'$$

$$\ln(x) = (x \cdot \ln(x) - x)' \quad \log_a x = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot (x \ln(x) - x) \right)'$$

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = \left(\frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{(a^2 - x^2)} \right)' \quad \sqrt{(a^2 + x^2)} = \left(\frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{(a^2 + x^2)} \right)'$$

$$\sin(x) = (-\cos(x))' \quad \cos(x) = (\sin(x))' \quad \sin^2(x) = \left(\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} \right)'$$

$$\cos^2(x) = \left(\frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2} \right)' \quad \tan(x) = (-\ln|\cos(x)|)'$$

Partielle Integration

$$\text{Regel: } \int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Beispiele:

$$\int \underbrace{x}_{v'} \cdot \underbrace{e^x}_{u'} \, dx = \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^x}_{u} - \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{e^x}_{u} \, dx = x e^x - e^x + C$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos(x)}_{u'} \cdot \underbrace{x^2}_{v'} \, dx &= \underbrace{\sin(x)}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v} - \int \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{2x}_{v'} \, dx \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - (-\cos(x)) \cdot 2x - \int -\cos(x) \cdot 2 \, dx = x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \sin(x) + C \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\ln x \cdot \ln x]_{\lambda}^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\ln^2 x]_{\lambda}^1 = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\ln^2 \lambda = -\infty \rightarrow \text{uneigentliches Integral divergiert}$$

Integration durch Substitution

$$\text{Regel: } \int f(x) \, dx \quad \text{mit nervigem Term } h(x) \rightarrow \text{neue Variable: } t = h(x)$$

$$\text{Umkehrfunktionen: } x = h^{-1}(t) = g(t), \quad \frac{dx}{dt} = g'(t) \Leftrightarrow dx = g'(t) \, dt$$

$$\int f(x) \, dx = f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

Beispiel:

$$\int_{x=0}^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx \quad \text{neue Variable: } t = x^2+1, \quad \frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dt = 2x \, dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} dt = x \, dx$$

$$\text{für } x \, dx \text{ einsetzen und Grenzen anpassen: } \int_{t=0^2+1=1}^{1^2+1=2} \frac{1}{2} \frac{dt}{t} = \left[\frac{1}{2} \ln|t| \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Verallgemeinerung von Beispiel: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

Uneigentliche Integrale

Beispiel: siehe Partielle Integration

Taylorreihe

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

Bekannte Taylorreihen, siehe auch FS Kapitel 8.6 (S. 193)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Bestimmung von Taylorreihe mithilfe bekannter Taylorreihe:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Bestimmung von Grenzwert mithilfe bekannter Taylorreihen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \dots\right)^2}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \dots\right)^2}{x^2 \left(-\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!}\right)} = \frac{1^2}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Mehrdimensionale Differentialrechnung/Kurvendiskussion

Wiederholung zur eindimensionalen Kurvendiskussion:

$f'(x) > 0$: monoton steigend $f'(x) < 0$: monoton fallend $f'(x) = 0$: stationäre Punkte*

*Vorzeichenwechsel von - zu + $\rightarrow$ Minimum; von + zu - $\rightarrow$ Maximum

$f'(x) > 0$: linksgekrümmt $f'(x) < 0$: rechtsgekrümmt $f'(x) = 0$ und wechselt Vz: Wendepunkte

$f'(x) = f''(x) = 0$ und $f''(x)$ wechselt Vz: Terrassenpunkte

$f(x) = -f(-x)$: punktsymmetrisch zum Ursprung $f(x) = f(-x)$: achsensymmetrisch zur y-Achse

Partielle Ableitungen: $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ (f_x ist f nach x Abgeleitet, f_y nach y)

Stationäre Punkte: $\text{grad } f(x, y) = 0$ (Gleichungssystem)

Hessematrix: $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = H_f^T$

Einordnung des stationären Punkts (x_0, y_0) :

$$D = \det H_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

- $D > 0$: $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$? lokales Minimum : lokales Maximum
- $D < 0$: Sattelpunkt
- $D = 0$: keine Aussage möglich

Tangentialebene: $T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_e = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$

Richtungsableitung an Punkt (x_0, y_0) : $\langle \text{grad } f(x_0, y_0), \vec{r} \rangle = f_x \cdot r_1 + f_y \cdot r_2$

Voraussetzung: $|\vec{r}| = 1$

Richtung mit maximaler Steigung an Punkt (x_0, y_0) : Punkt in Gradient einsetzen und

diesen als Richtungsvektor verwenden

Richtung mit minimaler Steigung an Punkt (x_0, y_0) : Richtung mit max. Steigung mal -1

Integration mit mehreren Variablen: $B = \int_a^b \left(\int_c^d dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b dx \right) dy$

Differenzengleichungen

Beispiel (1) für inhomogene Differenzengleichung: $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n \cdot 3^n \quad n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel (2) für inhomogene Differenzengleichung mit Startwerten:

$y_{n+2} - 5y_{n+1} - 14y_n = 10 \cdot 7^{n+1}$ Startwerte: $y_0 = 2, y_1 = 0 \quad n \in \mathbb{N}_0$

1. Nullstellen des charakteristischen Polynoms für homogene Lösung:

Beispiel 1: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

→ homogene Lösung: $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$

„Ersatzlösung“ bei mehrfachen Nullstellen: Faktor $n^2 / n^3 / \dots$ ergänzen

2. partikuläre Lösung finden:

Beispiel 1: $\underbrace{n}_{\text{homogen}} \cdot \underbrace{3^n}_{\text{Potenzfkt. mit Resonanz, da 3 Nst. d. charak. Polynoms}}$

→ Ansatz: $y_n = (\gamma_0 + \gamma_1 \cdot n) \cdot \underbrace{n}_{\text{wg. Resonanz}} \cdot 3^n = (\gamma_0 \cdot n + \gamma_1 \cdot n^2) \cdot 3^n$

(Wenn 3 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms wäre, müsste man n^2 im Ansatz verwenden.)

Beispiel 2: $n^0 \cdot 10 \cdot 7^{n+1}$ → Ansatz: $y_n = \gamma \cdot 7^{n+1} = 7\gamma \cdot 7^n$

weiteres Beispiel: $n+1$ → Ansatz: $y_n = (\gamma_0 + \gamma_1 \cdot n) \cdot \underbrace{n}_{\text{wg. Resonanz (1 ist Nst. des charak. Polynoms)}} \cdot (1^n)$

3. Einsetzen in Rekursion:

$$y_n = (\gamma_0 \cdot (n+2) + \gamma_1 \cdot (n+2)^2) \cdot 3^{n+2} - 5 \cdot (\gamma_0 \cdot (n+1) + \gamma_1 \cdot (n+1)^2) \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot (\gamma_0 \cdot n + \gamma_1 \cdot n^2) \cdot 3^n$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{6\gamma_1}_{=1} \cdot n + \underbrace{(3\gamma_0 + 21\gamma_1)}_{=0} = n \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{1}{6}, \gamma_0 = -\frac{7}{6}$$

(Für Umformung durch 3^n teilen, dann Aufteilen in Terme mit n^2 , in Terme mit n und Terme ohne n .)

Am Ende zur Bestimmung der Gamma-Werte Teilterme gleich 1 bzw. 0 setzen.)

4. partikuläre Lösung: Lösungen aus 3. in Ansatz aus 2. einsetzen
inhomogene Lösung: partikuläre Lösung + homogene Lösung

Beispiel 1: $y_n = \left(-\frac{7}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^2 \right) \cdot 3^n + c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$ Beispiel 2: $y_n = 7^n + c_1 \cdot (-7)^n + c_2 \cdot 2^n$

5. Wenn Startwerte y_0 und y_1 gegeben sind diese für n in Lösung aus 4. einsetzen.
→ c_1 und c_2 können durch Lösen dieses LGS bestimmt werden

Beispiel 2: $y_0 = 7^0 + c_1 \cdot (-7)^0 + c_2 \cdot 2^0 = 2$ (I) → $c_2 = 0, c_1 = 1$ → $y_n = 7^n + (-7)^n$
 $y_1 = 7^1 + c_1 \cdot (-7)^1 + c_2 \cdot 2^1 = 0$ (II)

Wenn man komplexe Nullstellen wie beispielsweise $\lambda_{1/2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ erhält, diese in

Polarform umrechnen: $\lambda_{1/2} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{\pm \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot i}$

→ Lösung: $y_n = c_1 \cdot 2^n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right) + c_2 \cdot 2^n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right)$